MAT104 Problem Saati

Araş. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$$f(x,y) = (x-1)(y+1)(x+y-3)$$

Fonksiyonunun, varsa eğer, yerel minimum, maksimum ve eyer noktalarını bulunuz.

$f_x(x,y) = (y+1)(x+y-3) + (x-1)(y+1) = (y+1)(2x+y-4)$ sürekli $\mathbb{R}^2$

$f_y(x,y) = (x-1)(x+y-3) + (x-1)(y+1) = (x-1)(x+2y-2)$ sürekli

$f_x = 0 \Rightarrow y=-1$ veya $2x+y=4$

$f_y = 0 \Rightarrow x=1$ veya $x+2y=2$

Kritik Noktalar:

$(1,-1), (1,2), (4,-1), (2,0)$

$f_{xx}(x,y) = 2(y+1)$

$f_{xy}(x,y) = (2x+y-4) + (y+1) = 2x+2y-3 = f_{yx}(x,y)$

$f_{yy}(x,y) = 2(x-1)$

2. Türev Testi

$(1,-1)$: $f_{xx}(1,-1)=0$, $f_{yy}(1,-1)=0$, $f_{xy}(1,-1)=-3$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-9<0$

$\hookrightarrow$ Eyer noktasıdır.

$(4,-1)$: $f_{xx}(4,-1)=0$ $f_{yy}(4,-1)=6$ $f_{xy}(4,-1)=3$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-9<0$

$\hookrightarrow$ Eyer noktasıdır.

$(1,2)$: $f_{xx}(1,2)=6$, $f_{yy}(1,2)=0$, $f_{xy}(1,2)=3$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-9<0$

$\hookrightarrow$ Eyer noktasıdır.

$(2,0)$: $f_{xx}(2,0)=2$, $f_{yy}(2,0)=2$, $f_{xy}(2,0)=1$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=3>0$

$\hookrightarrow$ $f_{xx}>0$ ve $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$

$\Rightarrow$ $(2,0)$ bir yerel minimumdur.

$f(2,0)=-1$

Soru 2.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

Fonksiyonunun, varsa eğer, yerel minimum, maksimum ve eyer noktalarını bulunuz.

$f_x(x,y) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(3x+6) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = -2$

$f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y(3y-6) = 0 \Rightarrow y = 0$ veya $y = 2$

Kritik Noktalar: $(0,0), (0,2), (-2,0), (-2,2)$

$f_{xx}(x,y) = 6x + 6$ $\quad f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 6y - 6$

$(0,0)$: $f_{xx}(0,0) = 6$, $f_{yy}(0,0) = -6$, $f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0$

$\hookrightarrow$ Eyer Noktasıdır.

$(0,2)$: $f_{xx}(0,2) = 6$, $f_{yy}(0,2) = 6$, $f_{xy}(0,2) = 0$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0$

>0

$\hookrightarrow$ Yerel minimum noktasıdır. $f(0,2) = -12$

$(-2,0)$: $\underbrace{f_{xx}(-2,0)=-6}_{<0}$, $f_{yy}(-2,0)=-6$, $f_{xy}(-2,0)=0$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=36>0$

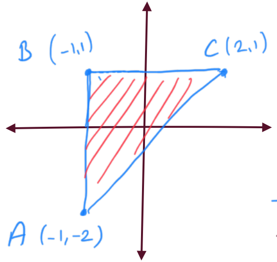
↳ Yerel maksimum noktasıdır. $f(-2,0)=-4$ //

$(-2,2)$: $f_{xx}(-2,2)=-6$, $f_{yy}(-2,2)=6$, $f_{xy}(-2,2)=0$, $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=-36<0$

↳ Eyer noktasıdır.

Soru 3.

$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ fonksiyonunun köşeleri $(-1,1), (2,1), (-1,-2)$ olan R üçgensel bölgesindeki mutlak maksimum ve minimumunu bulunuz.



$f_x(x,y) = 2x + 2y = 0$, $f_y(x,y) = 2y + 6y = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$

Bölgenin içinde bir nokta ! $(0,0)$

Sınır noktalarını inceleyelim:

AB doğrusu üzerinde $x=-1$, $-2 \le y \le 1$

$f(-1,y) = 3y^2 - 2y + 1$, $f'(-1,y) = 6y - 2 = 0$ $y = \frac{1}{3}$

$(-1,-2)$, $(-1, \frac{1}{3})$ ve $(-1,1)$

BC doğrusu üzerinde: $y = 1$ ve $-1 \le x \le 2$

$f(x,1) = x^2 + 2x + 1$ $f'(x,1) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$(-1,1)$, $(2,1)$

AC doğrusu üzerinde $\quad y = x-1$ ve $-1 \le x \le 2$

$$f(x,y) = f(x, x-1) = x^2 + 2x(x-1) + 3(x-1)^2 = 6x^2 - 8x + 3$$

$$f'(x) = 12x - 8 = 0$$

Sınır noktalarından $(-1,-2)$ ve $(2,1)$ kritik noktalar. $x = \frac{2}{3} \in [-1,2]$

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Sonuç olarak, kritik noktalarda değerleri incelersek

$f(0,0) = 0$

$f(-1,-2) = 17$

$f(-1, \frac{1}{3}) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$f(-1,1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$f(2,1) = 4 + 4 + 3 = 11$

$f(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}) = \frac{1}{3}$

$f(x,y)$, $(-1,-2)$ noktasında mutlak maksimum 17 değerini, $(0,0)$ noktasında mutlak minimum 0 değerini alır.

Soru 4.

$f(x,y) = 2y^3 + 2x^2y - x^2 - y$ fonksiyonun $D = \left\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ kapalı bölgesindeki mutlak minimum ve maksimumunu bulunuz.

İç noktaları kontrol edelim.

$f_x(x,y) = 4xy - 2x = 2x(2y-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $y = \frac{1}{2}$

$f_y(x,y) = 6y^2 + 2x^2 - 1 = 0.$ $\quad x = 0 \Rightarrow y = \mp \frac{1}{\sqrt{6}}$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{4} + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -\frac{1}{2}$

Yok!

Kritik noktalarımız: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Sınır noktalarını inceleyelim: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$f(x,y) = 2y^3 + 2(1-y^2)y - (1-y^2) - y = y^2 + y - 1 \Rightarrow f' = 2y + 1 = 0$

$y = -\frac{1}{2} \in [-1,1]$

$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(0,-1)$, $(0,1)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ kritik noktalardır.

$\hookrightarrow$ Sınır değerlerinden gelir.//

Sonuç olarak, f fonksiyonu bulduğumuz kritik noktalarda değerlendirirsek,

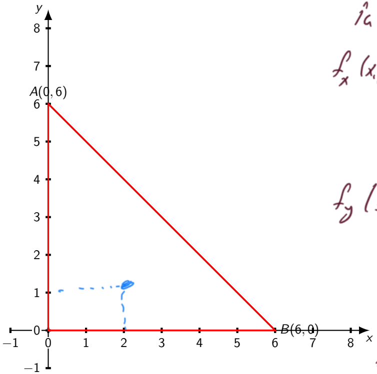
f'in $(0,1)$ noktasında mutlak maksimum 1 değerine ve

$\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktalarında mutlak minimum $-\frac{5}{4}$ değerine

ulaştığını görürüz. //

Soru 5.

$f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ fonksiyonunun $R : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6$ olarak tanımlanan kapalı R bölgesinde aldığı mutlak minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.



iç noktalara bakalım:

$$f_x(x,y) = 2xy(4-x-y) + x^2y(-1)$$
$$= 8xy - 2x^2y - 2xy^2 - x^2y$$
$$= xy(8-3x-2y)$$
$$f_y(x,y) = x^2(4-x-y) + x^2y(-1)$$
$$= x^2(4-x-2y)$$

$f_x = 0 \Rightarrow x=0,\ y=0,\ 3x+2y=8$

$f_y = 0 \Rightarrow x=0$ veya $x+2y=4$

iç noktalarla ilgilendiğimiz için $(0,0)$'ı göz ardı edelim.

$\Rightarrow 3x+2y=8$ ve $x+2y=4 \Rightarrow (x,y)=(2,1)$ iç nokta

Sınır noktalarını inceleyelim

OA doğrusu üzerinde $x=0,\ 0 \le y \le 6 \Rightarrow f(x,y)=0$ kritik noktalar $(0,0)$ ve $(0,6)$

OB doğrusu üzerinde $y=0,\ 0 \le x \le 6 \Rightarrow f(x,y)=0$ $(6,0)$

AB doğrusu üzerinde $x+y=6 \Rightarrow f(x,y)=f(x,6-x)=2x^3-12x^2$

$f'(x)=6x^2-24x=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=4$ $(4,2)$

f'in değerlerini tüm kritik noktalarda

$(0,0),\ (0,6),\ (2,1),\ (4,2),\ (6,0)$

da değerlendirirsek, f'in $(2,1)$ noktasında mutlak maksimum 4'e ve $(4,2)$ noktasında mutlak minimum -64'e ulaştığını görürüz.

Soru 6.

Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ kısıtı altındaki ekstremum değerlerini bulunuz.

Kısıt için $g(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y$ olsun.

$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \langle 2x, 2y \rangle = \lambda \langle 2x-2, 2y-4 \rangle$

$2x = \lambda(2x-2)$ ve $2y = \lambda(2y-4) \Rightarrow x = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ ve $y = \dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$

$\lambda = 1 \Rightarrow 2x = 2x-2 \Rightarrow 0 = -2$ ÇELİŞKİ

$\lambda \neq 1 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow g(x, 2x) = x^2 - 2x + (2x)^2 - 4(2x) = 0$

$5x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 4$

Verilen kısıt altında

$f(0,0) = 0$ minimum

$f(2,4) = 20$ maksimum

Soru 7.

$x^2+y^2+z^2=16$ küresi üzerinde, $(1,2,2)$ noktasına en yakın noktayı Lagrange çarpanları yöntemi ile bulunuz.

Bir (x,y,z) noktası ile $(1,2,2)$ noktası arasındaki uzaklık

$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$ ile bulunur.

$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ olsun. Aranılan noktanın küre üzerinde olması (kısıt) için, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-16$ olsun.

$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow \langle 2(x-1),2(y-2),2(z-2)\rangle=\lambda\langle 2x,2y,2z\rangle$

Dolayısıyla, $2(x-1)=2x\lambda$, $2(y-2)=2y\lambda$, $2(z-2)=2z\lambda$

$x=\dfrac{1}{1-\lambda}$, $y=\dfrac{2}{1-\lambda}$, $z=\dfrac{2}{1-\lambda}$

$\underline{\underline{\lambda \neq 1}}$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-16 = \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{(1-\lambda)^2} = 16 \Rightarrow 1-\lambda = \mp \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{7}{4} \text{ ve } \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{3},\ y = \frac{8}{3} \text{ ve } z = \frac{8}{3}$$

$$\lambda = \frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{4}{3},\ y = \frac{-8}{3} \text{ ve } z = \frac{-8}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-2\right)^2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$$

$$f\left(-\frac{4}{3},\frac{-8}{3},\frac{-8}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}-2\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}-2\right)^2 = \frac{49}{9}+\frac{196}{9}+\frac{196}{9} = 49$$

En yakın uzaklık $d = \sqrt{1} = 1$ //

Soru 8.

Bir fabrika işlettiğinizi ve ürününüzü üretmek için hammadde olarak çelik gerektiğini varsayalım. En önemli giderleriniz, iş gücü ve çelik maliyetidir. İşçilerinize saatte 20 lira ödediğinizi ve çeliğin tonunun 170 lira olduğunu varsayalım. Geliriniz kabaca

$$R(s,t) = 200s^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}$$

ile ifade edilsin öyle ki s iş gücü saati ve t çeliğin tonu olsun. Eğer bütçeniz 20000 lira ise mümkün olan maksimum gelir nedir? Lagrange çarpanları yöntemi ile bulunuz.

Answer.
Soruyu matematiksel dilde yazmak istersek:
$R(s,t)$ $\cancel{f(s,p)} = 200s^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değeri bulmak istiyoruz öyle ki $20s + 170t = 20000$ sağlansın.

Dolayısıyla kısıtımızı $g(s,t) = 20s + 170t - 20000$ olarak tanımlayalım.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies < \frac{400}{3} s^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}, \frac{200}{3} s^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{2}{3}} >= \lambda < 20, 170 > .$$

Böylece,

$$\frac{400}{3} s^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}} = 20\lambda \implies \frac{t^{\frac{1}{3}}}{s^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{20}\lambda \implies \frac{t}{s} = \left(\frac{3\lambda}{20}\right)^3$$

$$\frac{200}{3} s^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{2}{3}} = 170\lambda \implies \frac{s^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{51}{20}\lambda \implies \frac{s}{t} = \left(\frac{51\lambda}{20}\right)^{3/2}$$

Üstteki iki eşitliği kullanarak,

$$\left(\frac{3\lambda}{20}\right)^2 = \left(\frac{20}{51\lambda}\right) \implies \lambda^3 = \frac{8000}{459}$$

Böylece, $\lambda \cong 2,5927$ olarak bulunur.

Aynı eşitlikleri kullanarak s ve t'den birini diğeri cinsinden yazabiliriz.

$$t = 0.0588s$$

Şimdi, $20s + 170t = 20000$ eşitliğini kullanarak s ve t'yi aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$s \cong 666,667 \text{ and } t \cong 39,2157$$

Sonuç olarak, yaklaşık olarak 667 saat iş gücü ve 39 ton çelik kullanarak maksimum gelir olan

$$R(s,t) \cong 51777$$

lirayı elde edebiliriz.