MAT104 Problem Saati

Araş. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$F(x,y,z) = \ln(x+2y+2z)$ fonksiyonunun $P_0(1,-1,1)$ noktasında $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ yönündeki doğrultu türevini bulunuz.

F fonksiyonun P_0 noktasında v birim vektörü yönündeki doğrultu vektörü $(D_v F)_{P_0} = (\nabla F)_{P_0} \cdot \vec{v}$, $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{k}$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,-1,1)} = \left.\frac{1}{x+2y+2z}\right|_{(1,-1,1)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,-1,1)} = \left.\frac{2}{x+2y+2z}\right|_{(1,-1,1)} = 2$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,-1,1)} = \left.\frac{2}{x+2y+2z}\right|_{(1,-1,1)} = 2$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$$

Sonuç olarak,

$$(\nabla F)_{P_0} \cdot \vec{v} =$$

$$(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 2 + 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ //}$$

Soru 2.

Hangi doğrultuda $f(x, y) = xy + x^2$ fonksiyonunun $P_0(2, 3)$ deki doğrultu türevi 0 dır ?

Varsayalım ki $f(x,y)$ 'nin $P_0(2,3)$ noktasında $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ yönündeki doğrultu türevi sıfır olsun. $\|v\| = 1$ olması için $v_1^2 + v_2^2 = 1$ olmalıdır.

$$\left(D_v f\right)_{P_0} = \left(\nabla f\right)_{P_0} \cdot \vec{v} = \left(7\vec{i} + 2\vec{j}\right) \cdot \left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,3)} = y + 2x\Big|_{(2,3)} = 7$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,3)} = x\Big|_{(2,3)} = 2$$

$$\Rightarrow 7v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{2}{7}v_2$$

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{7}v_2\right)^2 + v_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{53v_2^2}{49} = 1 \Rightarrow v_2^2 = \frac{49}{53}$$

$$v_1^2 = \frac{4}{53}$$

Sonuç olarak,

$$v_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{53}} \quad \text{ve} \quad v_2 = \mp\frac{7}{\sqrt{53}} \Rightarrow \vec{v} = \frac{2}{\sqrt{53}}\vec{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\vec{j}$$

$$\text{ya da} \quad \vec{v} = -\frac{2}{\sqrt{53}}\vec{i} + \frac{7}{\sqrt{53}}\vec{j}$$

Soru 3.

$A(3,-2,1)$, $B(3,2,3)$ veriliyor. $F(x,y,z)=e^{xz}\cos y+\ln(xz)+\sin(yz)$ fonksiyonunun $(2,0,1/2)$ noktasında $\vec{AB}$ doğrultusu yönündeki türevini bulunuz.

$$\vec{AB} = B-A = (3,2,3)-(3,-2,1) = (0,4,2)$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{1}{\sqrt{4^2+2^2}}\cdot(0,4,2) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(0.\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(2,0,1/2)} = \left.\left(ze^{xz}\cos y+\frac{z}{xz}\right)\right|_{(2,0,1/2)} = \frac{e}{2}+\frac{1}{2} = \frac{e+1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(2,0,1/2)} = \left.\left(e^{xz}(-\sin y)+\cos(yz).z\right)\right|_{(2,0,1/2)} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(2,0,\frac{1}{2})} = \left.\left(xe^{xz}\cos y+\frac{x}{xz}+\cos(yz).y\right)\right|_{(2,0,\frac{1}{2})} = 2e+2 = 2(e+1)$$

$$\left(D_{\vec{v}} F\right)_{P_0} = \left(\nabla F\right)_{P_0} \cdot \vec{v}$$

$$= \left(\frac{e+1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2(e+1)\vec{k}\right) \cdot \left(0\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2(e+1)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2e+3}{\sqrt{5}} \ .\ //$$

Soru 4.

$f(x,y) = 2x^2 + y^3$ veriliyor. $f(x,y)$ fonksiyonunun $Q(-1,1)$ noktasındaki en hızlı artışı hangi doğrultuda olur? Bu doğrultudaki değişim hızı nedir?

$f(x,y)$'nin $Q(-1,1)$ noktasında $\vec{v}$ yönündeki doğrultu türevi $(D_v f)_Q = (\nabla f)_Q \cdot v$

$$(\nabla f)\Big|_{(-1,1)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(-1,1)} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(-1,1)} \cdot \vec{j}$$

$$= (4x)\Big|_{(-1,1)} \vec{i} + (3y^2)\Big|_{(-1,1)} \cdot \vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$$

Fonksiyon en hızlı olarak ∇f yönünde artar, $-\nabla f$ yönünde azalır.

$(\nabla f)_Q \cdot \vec{v} = |(\nabla f)_Q| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$. $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$ (aynı yön)

$$\vec{v} = \frac{(\nabla f)_Q}{|(\nabla f)_Q|} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} \cdot (-4\vec{i} + 3\vec{j}) = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

Değişim hızı

$$(D_v f)_Q = |(\nabla f)_Q| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Soru 5.

$yz = 1 - x^3$ yüzeyinin $(-1, 2, 1)$ noktasındaki teğet düzlem ve bu yüzeye normal olan doğrunun denklemini bulunuz.

$f(x,y,z) = c$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$'da teğet düzlem: $f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0) = 0$

Normal doğru: $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \nabla f(P_0) \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$

$x = x_0 + f_x(P_0) \cdot t$, $y = y_0 + f_y(P_0) \cdot t$, $z = z_0 + f_z(P_0) \cdot t$

$f(x,y,z) = yz + x^3 - 1$, $P_0(-1, 2, 1)$,

$$(\nabla f)_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0} \vec{k} = 3x^2\Big|_{(-1,2,1)} \vec{i} + z\Big|_{(-1,2,1)} \vec{j} + y\Big|_{(-1,2,1)} \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{= 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}$$

Teğet Düzlem: $(3)(x+1) + (1)(y-2) + (2)(z-1) = 0$

$\Rightarrow 3x + 3 + y - 2 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow 3x + y + 2z = 1$ //

Normal Doğru: $x = -1 + 3t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$. //

Soru 6.

f fonksiyonu, $f(0) = 2$ olacak şekilde diferansiyellenebilen bir fonksiyondur. $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlem denklemini bulunuz.

$g(x,y,z) = xyf\left(\frac{y}{x}\right) - z$ olsun.

$g(x,y,z) = 0$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlem denklemi

$$g_x\Big|_P (x-1) + g_y\Big|_P (y-0) + g_z\Big|_P \cdot (z-0) = 0$$

$$g_x\Big|_P = y f\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Bigg|_{(1,0,0)} = 0$$

$$g_y\Big|_P = x f\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{(1,0,0)} = 1 \cdot f(0) = 2$$

$$g_z\Big|_P = -1\Big|_{(1,0,0)} = -1$$

Teğet düzlem denklemi

$$0(x-1) + 2(y-0) + (-1)(z-0) = 0$$

$$2y - z = 0.$$

Soru 7.

$z = \sqrt{25 - 9y^2}$ ve $z = 3y + e^{xy}$ yüzeylerinin $(0,1,4)$ noktasındaki kesişim eğrisine teğet olan doğrunun denklemini parametrik olarak bulunuz.

$f(x,y,z) = \sqrt{25 - 9y^2} - z$ ve $g(x,y,z) = 3y + e^{xy} - z$

$\nabla f(0,1,4)$ vektörü, $f(x,y,z) = 0$ seviye yüzeyine $(0,1,4)$ noktasında diktir.

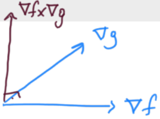
$\nabla g(0,1,4)$ vektörü, $g(x,y,z) = 0$ seviye yüzeyine $(0,1,4)$ noktasında diktir.

$$\nabla f(0,1,4) = f_x(0,1,4)\,\vec{i} + f_y(0,1,4)\,\vec{j} + f_z(0,1,4)\,\vec{k}$$

$$= 0\cdot\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{25-9y^2}}\cdot(-18y^2)\Big|_{(0,1,4)}\vec{j} + -1\cdot\vec{k} = \boxed{0\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j} - \vec{k}}$$

$$\nabla g(0,1,4) = g_x(0,1,4)\,\vec{i} + g_y(0,1,4)\,\vec{j} + g_z(0,1,4)\,\vec{k}$$

$$= ye^{xy}\Big|_{(0,1,4)}\cdot\vec{i} + (3 + xe^{xy})\Big|_{(0,1,4)}\cdot\vec{j} + (-1)\Big|_{(0,1,4)}\cdot\vec{k} = \boxed{\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}}$$



Yüzeylerin kesişim eğrisine teğet olan doğru $\nabla f(0,1,4) \times \nabla g(0,1,4)$ vektörü ile aynı yönlüdür.

$$\nabla f(0,1,4) \times \nabla g(0,1,4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -9/4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9/4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -9/4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \frac{21}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{9}{4}\vec{k}$$

$(0,1,4)$ noktasından geçen doğrunun doğrultu vektörü, $\frac{21}{4}\vec{i} - \vec{j} + \frac{9}{4}\vec{k}$ vektörü ile aynı yönlü old. için, doğru denklemi

$$x = 0 + (21/4)t$$
$$y = 1 + (-1)t$$
$$z = 4 + (9/4)t \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soru 8.

$1 - x^3 - yz = 0$ yuzeyine $(-1, 2, 1)$ noktasında teget olan düzlemi bulunuz ve teğet olan bu düzlemin $6x + 2y + 4z = 5$ düzlemine paralel oldugunu gösteriniz.

$f(x,y,z) = 1 - x^3 - yz$ olsun.

$f(x,y,z) = 0$ yüzeyine $(-1,2,1)$ noktasında teğet olan düzlem denklemi

$$f_x(-1,2,1)(x+1) + f_y(-1,2,1)(y-2) + f_z(-1,2,1)(z-1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(-1,2,1) &= -3x^2\Big|_{(-1,2,1)} = -3 \\ f_y(-1,2,1) &= -z\Big|_{(-1,2,1)} = -1 \\ f_z(-1,2,1) &= -y\Big|_{(-1,2,1)} = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$-3(x+1) + (-1)(y-2) + (-2)(z-1) = 0$$

$$-3x - 3 - y + 2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{n_1} = (3,1,2)$$

$$6x + 2y + 4z = 5 \Rightarrow \vec{n_2} = (6,2,4)$$

$\vec{n_2} = 2.\vec{n_1}$ old. düzlemler paraleldir.//