MAT104 Problem Saati

Araş. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$f(x,y) = \log_y x,\ f_x = ?,\ f_y = ?.$

$$f(x,y) = \frac{\ln x}{\ln y}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (\ln x)' \cdot \frac{1}{\ln y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln y}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x (\ln y)^{-1}\right) = \ln x \frac{\partial}{\partial y}\left((\ln y)^{-1}\right)$$

$$= \ln x \cdot (-1)(\ln y)^{-2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{-\ln x}{(\ln y)^2 \cdot y} \quad //$$

Soru 2.

$$f(x,y)=\int_{y^2}^{x}\cos(t^2)dt,\ f_x=?,\ f_y=?,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=?,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=?.$$

Leibniz Kuralı (Kalkülüs'ün Temel Teoremi)

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_{=1}.\cos(x^2)-\underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0}(y^2).\cos(y^4)=\cos(x^2)$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\underbrace{\frac{d}{dy}(x)}_{=0}.\cos(x^2)-\underbrace{\frac{d}{dy}(y^2)}_{=2y}.\cos(y^4)=-2y\cos(y^4)$$

y'ye göre çarpımın türevi

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2y\cos(y^4)\right)=(-2)\cos(y^4)-2y.(-\sin y^4).4y^3$$

$$=-2\cos y^4+8y^4\sin(y^4)$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{-2y\cos y^4}_{x'\text{e göre sabit}}\right)=0$$

Soru 3.

$s(x,y) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonunun tüm ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz. $s_x = ?$ $s_y = ?$ $s_{xy} = ?$ $s_{yx} = ?$ $s_{xx} = ?$ $s_{yy} = ?$

Hatırlama: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u(x)\right) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'(x)$

$$s_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$s_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left((-y)(x^2+y^2)^{-1}\right) = (-y)(-1)(x^2+y^2)^{-2} \cdot (2x) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$s_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left((-y)(x^2+y^2)^{-1}\right) = (-1)(x^2+y^2)^{-1} + (-y)(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2y)$$

$$= \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$s(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$s_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = x\left(x^2+y^2\right)^{-1}$$

$$s_{yy} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right) = x(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}(2y)$$

$$= \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$s_{yx} = \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right)$$

$$= (1)\left(x^2+y^2\right)^{-1} + (x)(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}(2x)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad .//$$

(x^2+y^2)

Soru 4.

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonu orijinde diferansiyellenebilir mi?

Türevin limit tanımını kullanalım,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$1 \neq -1$. Limit yoktur.

$f_x(0,0)$ var olmadığından, $f(x,y)$ orijinde türevlenemez.

(A) "$f(x,y)$ fonk. f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir R bölgesinde sürekli iseler, f fonksiyonu R'nin her noktasında diferansiyellenebilirdir."

(A) $f(x,y)$ fonk. (x_0,y_0)'da diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu (x_0,y_0)'da süreklidir.

Soru 5.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$ fonksiyonu orijinde türevlenebilir mi?

$x = ky^2$ yolu üzerin limite bakalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(ky^2,y)\to(0,0)} \frac{ky^2 \cdot y^2}{(ky^2)^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ky^4}{(k^2+1)y^4} = \frac{k}{k^2+1}$$

Limit sonucu k'ya bağlı olduğundan, limit yoktur.

Fonksiyon orijinde sürekli olamaz.

Dolayısıyla türevlenemez.

Soru 6.

Türevin limit tanımını kullanarak

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ fonksiyonunun f_{xy} f_{yx} kısmi türevlerini orijinde hesaplayınız.

Fonksiyon orijinde türevlenebilir mi?

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy\left(\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0} y \cdot \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y$$

$$f_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{xh\left(\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}\right)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} x \cdot \frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = x$$

f_x ve f_y değerleri vardır ve $(0,0)$ etrafında bir açık kümede süreklidirler. (Aslında her yerde süreklidirler.) Dolayısıyla, "türevlenebilir".

Genel olarak $f_{xy} \neq f_{yx}$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(k,0) - f_y(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{k} = 1$$

Soru 7.

$z = f(\cos(x-y))$ verilsin. f türevlenebilir fonksiyon olmak üzere $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ eşitliğinin sağlandığını gösterin.

$$z_x = f'(\cos(x-y)) \cdot (-\sin(x-y))(1)$$

$$z_{xx} = f''(\cos(x-y))(-\sin(x-y))(1)(-\sin(x-y))$$
$$+ f'(\cos(x-y))(-\cos(x-y)(1))$$
$$= f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - f'(\cos(x-y))\cos(x-y) \quad (1)$$

$$z_{xy} = f''(\cos(x-y))(-\sin(x-y))(-1)(-\sin(x-y))$$
$$+ f'(\cos(x-y))(-\cos(x-y))(-1)$$
$$= -f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) + f'(\cos(x-y))\cos(x-y)$$

$$2z_{xy} = -2f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) + 2f'(\cos(x-y))\cos(x-y) \quad (2)$$

$$z = f(\cos(x-y))$$

$$z_y = f'(\cos(x-y))(-\sin(x-y))(-1)$$

$$= f'(\cos(x-y))\sin(x-y)$$

$$z_{yy} = f''(\cos(x-y))(-\sin(x-y))(-1)\sin(x-y)$$

$$+ f'(\cos(x-y))\cos(x-y)(-1)$$

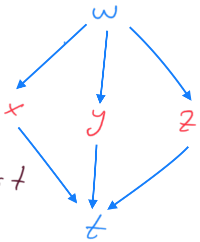
$$= f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - f'(\cos(x-y))\cos(x-y) \quad (3)$$

$$\Rightarrow z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$$

Soru 8.

$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), x = \cos t, y = \sin t, z = 4\sqrt{t}?, \dfrac{dw}{dt} = ?.$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt}$$



$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} (2x) . (-\sin t) + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} (2y) . \cos t$$

$$+ \frac{1}{x^2+y^2+z^2} (2z) . 4 . \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \Big(\underbrace{-x \sin t}_{\cancel{-\cos t \sin t}} + \underbrace{y \cos t}_{\cancel{\sin t \cos t}} + 4 \underbrace{z}_{4\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \Big) = \frac{2}{1+16t} \cdot 16 = \frac{32}{1+16t}$$

Soru 9.

$u(x,t) = \sin(x - at)$ fonksiyonunun Dalga Denklemi'ni $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sağladığını gösteriniz $a \in \mathbb{R}$ ve sıfırdan farklı.

$$u_t = \cos(x-at)(-a)$$

$$u_{tt} = -\sin(x-at)(-a)(-a) = -a^2 \sin(x-at)$$

$$u_x = \cos(x-at)$$

$$u_{xx} = -\sin(x-at)$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = -a^2 \sin(x-at) - a^2 \cdot (-\sin(x-at))$$

$$= -a^2 \sin(x-at) + a^2 \sin(x-at) = 0_{//}$$

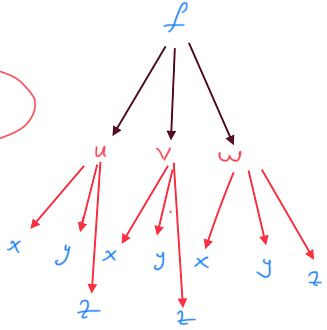
Soru 10.

$f(u,v,w)$ diferansiyellenebilir olsun. $u = x - y, v = y - z, w = z - x$ ise $f_x + f_y + f_z = 0$ sağlandığını gösteriniz.

$$f_x = f_u \cdot u_x + f_v v_x + f_w \cdot w_x$$
$$= f_u \cdot 1 + f_v \cdot 0 + f_w \cdot (-1) = f_u - f_w$$

$$f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y + f_w \cdot w_y$$
$$= f_u \cdot (-1) + f_v \cdot (1) + f_w \cdot (0)$$
$$= -f_u + f_v$$

$$f_z = f_u \cdot u_z + f_v \cdot v_z + f_w \cdot w_z$$
$$= f_u (0) + f_v (-1) + f_w \cdot (1)$$
$$= -f_v + f_w$$

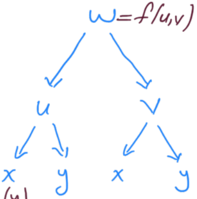


$$f_x + f_y + f_z = 0$$

Soru 11.

$w = f(u, v)$ olsun. $u = (x^2 - y^2)/2$ and $v = xy$ verilsin. $f(u, v)$ fonksiyonu Laplace Denklemini $f_{uu} + f_{vv} = 0$ sağladığına göre w fonksiyonunun da Laplace Denklemini $w_{xx} + w_{yy} = 0$ sağladığını gösteriniz.

$$w_x = w_u \cdot u_x + w_v \cdot v_x = f_u \cdot x + f_v \cdot y$$



$$w_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_u \cdot x + f_v \cdot y\right)$$

$\frac{\partial}{\partial x}(f_u \cdot x)$ çarpımın türevi

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_u) \cdot x + f_u \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(f_v)\, y + f_v \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{=0}$$

$$= \left(f_{uu} \cdot \underbrace{u_x}_{x} + f_{uv} \cdot \underbrace{v_x}_{y}\right) x + f_u + \left(f_{vu} \cdot \underbrace{u_x}_{x} + f_{vv} \cdot \underbrace{v_x}_{y}\right) y$$

$$= x^2 \cdot f_{uu} + xy \cdot f_{uv} + f_u + xy \cdot f_{vu} + y^2 f_{vv}$$

$$w_y = w_u \cdot u_y + w_v \cdot v_y = f_u \cdot (-y) + f_v \cdot x = -f_u \cdot y + f_v \cdot x$$

$$w_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-f_u \cdot y + f_v \cdot x\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(-f_u)\cdot y + (-f_u)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y)}_{=1} + \frac{\partial}{\partial y}(f_v)\cdot x + f_v \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x)}_{=0}$$

$$= \Big(-f_{uu}\cdot \underbrace{u_y}_{-y} - f_{uv}\cdot \underbrace{v_y}_{x}\Big)\cdot y - f_u + \Big(f_{vu}\cdot \underbrace{u_y}_{-y} + f_{vv}\cdot \underbrace{v_y}_{x}\Big)\cdot x$$

$$= y^2 \cdot f_{uu} - xy f_{uv} - f_u - xy f_{vu} + x^2 f_{vv}$$

$$w_{xx} + w_{yy} = x^2 f_{uu} + \cancel{xy f_{vu}} + xy f_{uv} + y^2 f_{vv} + \cancel{f_u}$$

$$+ y^2 f_{uu} - \cancel{xy f_{vu}} - \cancel{xy f_{uv}} + x^2 f_{vv} - \cancel{f_u}$$

$$= x^2 \underbrace{(f_{uu} + f_{vv})}_{=0} + y^2 \underbrace{(f_{uu} + f_{vv})}_{=0} = 0 \;//$$

Soru 12.

$F(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$ olsun. $(\pi/2, \pi, \pi)$ noktasında, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ifadesini hesaplayınız.

F fonksiyonu kapalı formdadır.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} = z_x := \mu(x,y,z)$$

$z_{xx} = \dfrac{-\mu_x}{\mu_z}$ olur.

$$z_{xx} = \frac{\big(-\sin(x+y) - \sin(x+z)\big)\big(\cos(y+z) + \cos(x+z)\big) + \sin(x+z)\big(\cos(x+y) + \cos(x+z)\big)}{\big(-\sin(x+z)\big)\big(\cos(y+z) + \cos(x+z)\big) + \big(\sin(y+z) + \sin(x+z)\big)\big(\cos(x+y) + \cos(x+z)\big)}$$

$$z_{xx}\Big|_{(\frac{\pi}{2}, \pi, \pi)} = 2 .//$$