

MAT104 MATEMATİK II
Kutupsal Koordinatlar - Vektörler- Vektör Değerli Fonksiyonlar

1. Aşağıda verilen eğrilerin yatay ve düşey teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

(a) $r = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

(b) $r = 3 - 4 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2. Aşağıdaki bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ kardioidinin içi

(b) $r = 2 \cos \theta$ ve $r = 2 \sin \theta$ çemberlerinin ortak iç bölgesi.

3. Aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını bulunuz.

(a) $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$ spirali,

(b) $r = e^\theta / \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ spirali.

4. $P_1(5, 6, 7)$, $P_2(3, 4, 5)$ noktaları için

(i) P_1 ve P_2 arasındaki uzaklığı,

(ii) $\overrightarrow{P_1P_2}$ 'nin doğrultusunu,

(iii) P_1P_2 doğru parçasının orta noktasını

hesaplayınız.

5. $\overrightarrow{AB} = i + 4j - 2k$ ve $B(5, 1, 3)$ noktası ise, A 'yı bulunuz.

6. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$ ve $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$ veriliyor. Buna göre aşağıdakileri hesaplayınız.

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$,

(b) \mathbf{v} ve \mathbf{u} arasındaki açının \cos 'u,

(c) \mathbf{v} 'nin \mathbf{u} yönündeki skaler bileşeni,

(d) $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

7. Boyları aynı olan iki vektörün toplamları ile farkının daima birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

8. Aşağıdaki vektörler arasındaki açıyı hesaplayınız.

(a) $u = 2i + j$, $v = i + 2j - k$

(b) $u = i + \sqrt{2}j - \sqrt{2}k$, $v = -i + j + k$

9. Aşağıdaki vektörlerin oluşturduğu kutunun hacmini bulunuz.

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

10. Aşağıdaki vektörler için $u \times v$ ve $v \times u$ 'nun uzunluk ve doğrultusunu bulunuz.

(a) $u = 2i - 2j - k$, $v = i - k$

(b) $u = i \times j$, $v = j \times k$

11. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ vektörünü, $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 'ya paralel ve $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 'ya dik vektörlerin toplamı olarak yazınız.

12. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$ küresinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.
13. Aşağıda verilen noktalar için
- (i) Köşeleri P , Q ve R olan üçgenin alanını bulunuz.
- (ii) PQR düzlemine dik bir birim vektör bulunuz.
- (a) $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(3, -1, 1)$ (b) $P(-2, 2, 0)$, $Q(0, 1, 1)$, $R(1, 2, -2)$
14. Aşağıdaki doğruların parametrik denklemlerini bulunuz.
- (a) $P(3, -2, -1)$ noktasından geçen ve $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörüne paralel olan
- (b) Orijinden geçen ve $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ 'ye paralel olan
- (c) $P(2, -2, 1)$ noktasından geçen $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, $z = 2 + 3t$ doğrusuna paralel olan
- (d) $P(2, 0, 5)$ 'ten geçen $3x + 7y - 5z = 21$ düzlemine dik olan
- (e) $P(2, 3, 0)$ 'dan geçen $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ vektörlerine dik olan
15. Aşağıdaki düzlemlerin denklemlerini bulunuz.
- (a) $P(-1, 2, 0)$ noktasını içeren ve normali $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ olan
- (b) $P(1, -1, -2)$ noktasını içeren ve $3x - y + z = 7$ düzlemine paralel olan
- (c) $P(1, 1, -1)$, $Q(2, 0, 2)$, $R(0, -2, 1)$ noktalarını içeren
- (d) $P(1, 3, -2)$ noktasından geçen ve $x + y + z = 5$ ve $3x - y = 4$ düzlemlerinin arakesit doğrusunu içeren düzlemin denklemi
- (e) $P(3, 5, 7)$ noktasını içeren ve $x = 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2 + 4t$ doğrusuna dik olan
- (f) $P(1, 0, 1)$ noktasını içeren ve orijinden P 'ye giden vektöre dik olan
- (g) $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ noktalarını içeren ve $4x - y + 2z = 7$ düzlemine dik olan
16. $P(2, 1, 3)$ noktasının $x = 2 + 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 3$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.
17. $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$ doğrusunun $x + y + z = 2$ düzlemini kestiği noktayı bulunuz.
18. $x + 2y + z = 1$ ve $x - y + 2z = -8$ düzlemlerinin kesişimi olan doğrunun $x = -3 + 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + 4t$ doğrusuna paralel olup olmadığını inceleyiniz.
19. $x = 2 + t$, $y = 1 + t$, $z = -(1/2) - (1/2)t$ doğrusunun $x + 2y + 6z = 10$ düzlemine uzaklığını bulunuz.
20. Verilen düzlemlerin arakesit doğrularının parametrisasyonunu bulunuz.
- (a) $3x - 6y - 2z = 3$, $2x + y - 2z = 2$ (b) $5x - 2y = 11$, $4y - 5z = -17$
21. Aşağıdaki yüzeyleri çizin.
- (a) $z^2 + x^2 - (y - 2)^2 = 0$ (b) $9y^2 + z^2 = 16$

22. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2 \sin t \cos t)\mathbf{k}] dt$

(b) $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k} \right] dt$

23. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2 \cos 3t)\mathbf{j} + (2 \sin 3t)\mathbf{k}$ bir parçacığın uzayda t zamanındaki konumu olsun. Parçacığın hız ve ivme vektörlerini bulunuz. Sonra verilen $t = 0$ anında parçacığın hızını ve hareket yönünü bulunuz. O anda parçacığın hız vektörünü hız ve yönünün çarpımı olarak yazınız.

24. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$ bir parçacığın uzayda t zamanındaki konumu olsun. $0 \leq t \leq 2\pi$ için hız ve ivme vektörlerinin birbirlerine dik olduğu an veya anları bulunuz.

25. $t = \pi/2$ anında $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$ eğriye teğet olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

26. $t = t_0$ anında, $r(t) = (a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $t_0 = 2\pi$ eğrisine teğet olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

27. Aşağıdaki eğrilerin birim teğet vektörlerini bulunuz. Ayrıca belirtilen eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi/2$

(b) $\mathbf{r}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}$, $\sqrt{2} \leq t \leq 2$

28. $\mathbf{r}(t) = (12 \sin t)\mathbf{i} - (12 \cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$ eğrisi üzerinde $t = 0$ anında artan yay uzunluğu yönünde $(0, -12, 0)$ 'dan 13π birim uzakta olan noktayı bulunuz.

29. $r(t)$ bir parçacığın uzayda t zamanındaki konumu olsun. $t = 0$ anında hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

(a) $r(t) = (\ln(t^2 + 1))\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j} + (\sqrt{t^2 + 1})\mathbf{k}$

(b) $r(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$